Краткие сообщения ОИЯИ №12-85 JINR Rapid Communications No.12-85
УДК 530.145

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Е.А.Кочетов

Цель работы состоит в исследовании спектральных свойств ряда модельных гамильтонианов типа гамильтониана Дикке, описывающих взаимодействие атома с полем излучения на определенной частоте. Определение спектра соответствующего гамильтониана позволяет найти все характерные для данной задачи параметры, а именно: степень возбуждения атома, среднее значение фононного поля и т.п. Используемый метод нахождения полного совместного набора собственных функций операторов заряда и гамильтониана дает точное решение задачи. Набор этих решений может быть использован для определения любых характеристик задачи. Полученные здесь результаты могут быть использованы,например, в задачах квантовой оптики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Exact Solutions of the Problems on Interaction of Two-Level Systems with Radiation

E.A.Kochetov

The aim of the paper is to study the spectral properties of some model Hamiltonians of the Dikke-type describing the interaction of an atom with a radiation field at certain frequency. The determination of the relevant Hamiltonian spectrum allows one to find all the parameters characteristic of this problem, namely the degree of excitation of an atom, an average value of the phonon field, etc. The method used to find a total common set of eigenfunctions of the charge and Hamiltonian operators provides an exact solution of the problem. The set of these solutions can be used for determining any characteristics of the problem. The results obtained can be used, for example, in quantum optics problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Рассмотрим гамильтониан

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_3 + \lambda (a^+)^k a^\ell s_+ + \lambda (a^+)^\ell a^k s_- , \qquad /1/$$

описывающий взаимодействие двухуровневой системы /атома/ с энергией перехода $2\omega_0$ с одномодовым фононным полем a, $[a, a^+] = 1$. В модели /1/ атомные переходы осуществляются посредством испускания и поглощения различного числа фононов $k \geq 0$ и $\ell \geq 0$. Нормировка паулевских операторов $\vec{s}$ выбрана так, что $[s_3, s_\pm] = \pm 2 s_\pm$, $[s_+, s_-] = s_3$. Оператор заряда системы $\hat{N} = a^+ a + \frac{\ell - k}{2} s_3$, являющийся интегралом движения $[H, \hat{N}] = 0$, имеет следующее спектральное представление

$$\hat{N} | \Phi_n^{(\pm)} > = N^{(\pm)} | \Phi_n^{(\pm)} >, \quad | \Phi_n^{(+)} > = \begin{pmatrix} |n> \\ 0 \end{pmatrix}, \quad | \Phi_n^{(-)} > = \begin{pmatrix} 0 \\ |n> \end{pmatrix}, \quad N^{(\pm)} = n \pm \frac{1}{2} (\ell - k).$$

Рассмотрим случай $\ell \geq k$. Ищем полную совместную систему собственных векторов H и $\hat{N}$ в виде

$$| \Psi_n (\alpha) > = \exp (\alpha s_+ (a^+)^k a^\ell) | \Phi_n^{(-)} > , \qquad /2/$$

где α - параметр, определяемый ниже. В силу соотношения $[\hat{N}, (a^+)^k a^\ell s_+] = 0$ имеем

$$\hat{N} | \Psi_n (\alpha) > = \hat{N} e^{\alpha s_+ (a^+)^k a^\ell} | \Phi_n^{(-)} > = e^{\alpha s_+ (a^+)^k a^\ell} \hat{N} | \Phi_n^{(-)} > = (n - \frac{\ell - k}{2}) | \Psi_n (\alpha) > .$$

При $\ell \geq k$ совокупность собственных значений оператора $\hat{N}$ совпадает с совокупностью чисел $\{ n - \frac{\ell - k}{2}, n \geq 0 \}$, в силу чего выбор волновых функций в виде /2/ обеспечивает выполнение необходимого условия полноты совместной системы собственных функций H и $\hat{N}$.

Подставляя /2/ в уравнение

$$H | \Psi > = \mathcal{E} | \Psi > , \qquad /3/$$

получаем уравнения, из которых определяются α и $\mathcal{E}$:

$$\lambda \alpha^2 C^2_{nk\ell} + 2 \alpha \Omega_{k\ell} - \lambda = 0 , \qquad \mathcal{E} = \omega n - \omega_0 + \lambda \alpha C^2_{nk\ell} ,$$

$$\Omega_{k\ell} = \frac{\omega}{2} (\ell - k) - \omega_0 , \quad C_{nk\ell} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{n!(n - \ell - k)!}}{(n - \ell)!} , & n \geq \ell , \\ 0 , & n < \ell . \end{cases} \qquad /4/$$

Решение имеет вид

$$a^{(\pm)}_{nk\ell} = \frac{-\Omega_{k\ell} \pm \sqrt{\Omega^2_{k\ell} + \lambda^2 C^2_{nk\ell}}}{\lambda C^2_{nk\ell}} ,$$

$$\mathcal{E}^{(\pm)}_n = \omega n - \frac{\omega}{2}(\ell - k) \pm \sqrt{\Omega^2_{k\ell} + \lambda^2 C^2_{nk\ell}} , \qquad /5/$$

и нормированный вектор состояния

$$|\Psi^{(\pm)}_n> = (1 + a^{(\pm)2} C^2_{nk\ell})^{-1/2} \begin{pmatrix} a^{(\pm)}_{nk\ell} \; C_{nk\ell} \; |n - \ell + k> \\ |n> \end{pmatrix} .$$

В формулах /5/ следует считать $n \geq \ell$. При $n < \ell$, $C_{nk\ell} = 0$, и из /5/ получаем предельные соотношения:

$$a^{(+)} = \lambda / 2\Omega_{k\ell}, \quad \mathcal{E}^{(+)} = \omega n - \omega_0 , \quad \left(|\Psi^{(+)}_n> = \begin{matrix} 0 \\ |n> \end{matrix} \right) ,$$

$$a^{(-)} = \infty , \quad \mathcal{E}^{(-)}_n = \omega (n - \ell + k) + \omega_0 , \quad |\Psi^{(-)}_n> = \begin{pmatrix} |n - \ell + k> \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad /6/$$

Соотношения /5/ и /6/ дают полное решение задачи /1/. Отметим, что частный случай задачи /1/ при $k = 0$, $\ell = 1$ называется моделью Джейнса - Каммингса, точное решение для которой было впервые получено в 1963 г. в работе [1], а затем повторено рядом авторов [2,3]. Формулы /5/, /6/ при $k = 0$, $\ell = 1$ полностью воспроизводят результаты процитированных работ.

Легко проверить полноту системы функций /5/, /6/, используя соотношение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |n><n| = 1$. А именно,

$$\sum_{n=0}^{\ell-1} |\Psi^{(+)}_n><\Psi^{(+)}_n| + \sum_{n=\ell}^{\infty} |\Psi^{(+)}_n><\Psi^{(+)}_n| + \sum_{n=\ell-k}^{\ell-1} |\Psi^{(-)}_n><\Psi^{(-)}_n| +$$

$$+ \sum_{n=\ell}^{\infty} |\Psi^{(-)}_n><\Psi^{(-)}_n| = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad /7/$$

Случай $k \geq \ell$ рассматривается аналогично, с тем лишь отличием, что теперь серия $N^{(+)} = n + \frac{\ell - k}{2}$ исчерпывает возможные собственные значения оператора $\hat{N}$, в связи с чем собственный вектор системы $|\Psi_n(a)>$ порождается теперь вектором $|\Phi^{(+)}_n> = \begin{pmatrix} |n> \\ 0 \end{pmatrix}$, а именно

$$|\Psi_n(\alpha)\rangle = \exp(\tilde\alpha s_-(a^+)^\ell a^k)|\Phi_n^{(+)}\rangle = \begin{pmatrix} |n\rangle \\ \tilde\alpha \tilde C_{nk\ell}|n-k+\ell\rangle \end{pmatrix},$$

$$\tilde C_{nk\ell} = C_{n\ell k}\ . \quad \tilde\alpha^{(\pm)} = \frac{\Omega_{k\ell} \pm \sqrt{\Omega_{k\ell}^2 + \lambda^2 \tilde C_{nk\ell}^2}}{\lambda \tilde C_{nk\ell}^2}. \qquad /8/$$

Результат выглядит следующим образом:

$$\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \omega n + \frac{\omega}{2}(\ell - k) \pm \sqrt{\Omega_{k\ell}^2 + \lambda^2 \tilde C_{nk\ell}^2}\ .$$

$$|\Psi_n^{(\pm)}\rangle = [1 + (\tilde\alpha^{(\pm)})^2 \tilde C_{nk\ell}^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} |n\rangle \\ \tilde\alpha^{(\pm)}\tilde C_{nk\ell}|n-k+\ell\rangle \end{pmatrix}, \quad n \geq k. \qquad /9/$$

Если $n < k$, то

$$\tilde\alpha^{(-)} = -\lambda/2\Omega_{k\ell}\ . \quad |\Psi_n^{(-)}\rangle = \begin{pmatrix} |n\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_n^{(-)} = \omega n + \omega_0\ .$$

$$/9'/$$

$$\tilde\alpha^{(+)} = \omega\ , \quad |\Psi_n^{(+)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |n-k+\ell\rangle \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_n^{(+)} = \omega(n-k+\ell) + \omega_0\ .$$

Аналогично рассмотренному выше случаю $\ell > k$ имеет место соотношение полноты /7/. Можно отметить, что случай $k > \ell$ получается из $k \leq \ell$ заменой $k \longrightarrow \ell$, верхней строки в векторах состояний на нижнюю и обратно, а также заменой $\omega_0 \longrightarrow -\omega_0$. Впрочем, это следует и из вида гамильтониана /1/. /Необходимо учесть, что при преобразовании $s_+ \longrightarrow s_-$ s_3 меняет знак/.

Рассмотрим теперь задачу о взаимодействии излучения с двухуровневой системой с зависящей от интенсивности фононного поля константой взаимодействия:

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_3 + \lambda a f(a^+ a) s_+ + \lambda f(a^+ a) a^+ s_-\ , \qquad /10/$$

где $f(x)$ - удовлетворяет условию $f(a^+ a)|n\rangle = f(n)|n\rangle$. Оператор $\hat N = a^+ a + \frac{s_3}{2}$ является интегралом движения. Ищем собственный вектор системы в виде

$$|\Psi_n(\alpha)\rangle = \exp(\alpha a f(a^+ a) s_+)|\Phi_n^{(-)}\rangle\ , \qquad /11/$$

при этом $\hat N |\Psi_n(\alpha)\rangle = (n - 1/2)|\Psi_n(\alpha)\rangle\ , \quad n \geq 0\ .$

Подставляя /11/ в уравнение /3/, получаем следующие выражения для собственных значений и собственных функций оператора /10/:

$$\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \omega n - \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2 n f^2(n)}\,, \qquad \Omega = \frac{\omega}{2} - \omega_0\,,$$

$$|\Psi_n^{(\pm)}> = [1 + (a^{(\pm)})^2 n f^2(n)]^{-1/2} \begin{pmatrix} a^{(\pm)} \sqrt{n} f(n) \,|n-1> \\ |n> \end{pmatrix},$$

$$a_n^{(\pm)} = \frac{-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2 n f^2(n)}}{\lambda n f^2(n)}\,, \quad n \geq 1\,, \quad f(n) \neq 0\,. \qquad /12/$$

$$\mathcal{E}_{n=0}^{(+)} = -\omega_0\,, \quad |\Psi_{n=0}^{(+)}> = \begin{pmatrix} 0 \\ |0> \end{pmatrix}.$$

Если же для некоторого n_0 $f(n_0)=0$, то

$$\mathcal{E}_{n_0}^{(+)} = \omega n_0 - \omega_0\,, \quad |\Psi_{n_0}^{(+)}> = \begin{pmatrix} 0 \\ |n_0> \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_{n_0}^{(-)} = \omega n_0 - \omega + \omega_0\,, \quad |\Psi_{n_0}^{(-)}> = \begin{pmatrix} |n_0 - 1> \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n_0 \geq 1\,.$$

Легко проверяется полнота системы собственных функций /12/. Задача /10/ с конкретным выбором функции f, $f(x) = \sqrt{x}$ рассматривалась в [4], где были вычислены различные средние оператора $s_3(t) = e^{iHt} s_3 e^{-iHt}$, на основе точного решения гейзенберговского уравнения для $s_3(t)$. Вычисленные в [4] величины можно получить, используя спектральное представление /12/, если положить там $f(x) = \sqrt{x}$.

В заключение рассмотрим гамильтониан

$$H = \omega_1 a^+ a + \omega_2 b^+ b + \omega_0 s_3 + \lambda a b^+ s_+ + \lambda a^+ b s_-\,, \qquad /13/$$

описывающий взаимодействие двухуровневой системы с двухмодовым полем излучения a, b. Важно, что в этой модели существуют два независимых интеграла движения $\hat{N} = a^+ a + s_3/2$ и $\hat{M} = b^+ b - \frac{s_3}{2}$. Их совместная полная система собственных функций

$$|\Phi_{n,m}^{(-)}> = \begin{pmatrix} 0 \\ |n>|m> \end{pmatrix} \begin{matrix} N^{(-)} = n - 1/2\,, \\ M^{(-)} = m + 1/2\,, \end{matrix} \qquad |\Phi_{n,m}^{(+)}> = \begin{pmatrix} |n>|m> \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} N^{(+)} = n + 1/2\,, \\ M^{(+)} = m - 1/2\,, \end{matrix}$$

где $N^{(\pm)}$ и $M^{(\pm)}$ – соответствующие собственные значения.

Полная совместная система собственных векторов операторов H, $\hat{N}$ и $\hat{M}$ должна отвечать всем возможным совместным значениям $\hat{N}$ и $\hat{M}$, в силу чего эту полную систему собственных векторов ищем в виде объединения двух систем

$$\{|\Psi^{(1)}_{n,m}(\alpha) = e^{\alpha_1 ab^+ s_+}|\Phi^{(-)}_{n,m}>\} \qquad \text{и } \{|\Psi^{(2)}_{n,m}(\alpha)> = e^{\alpha_2 a^+ bs_-}|\Phi^{(+)}_{n,m}>\}, \tag{14}$$

отвечающих двум возможным наборам собственных значений операторов $\hat{N}$ и $\hat{M}$ $(N^{(-)}, M^{(-)})$ и $(N^{(+)}, M^{(+)})$.

Подставляя векторы /14/ в уравнение /3/, определяем параметры α_1 и α_2 и, следовательно, собственные функции и собственные значения H:

$$|\Psi^{(\pm)}_{(1),n,m}> = [1 + (\alpha_1^{(\pm)})^2 n(m+1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(\pm)}\sqrt{n(m+1)}|n-1>|m+1> \\ |n>|m> \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1^{(\pm)} = \frac{\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2 n(m+1)}}{\lambda n(m+1)}, \qquad \Omega = \omega_0 - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

$$\mathcal{E}^{(\pm)}_{(1);n,m} = \omega_1 n + \omega_2 m - \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} \pm \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2 n(m+1)}, \qquad n \neq 0, \tag{15}$$

$$|\Psi^{(-)}_{(1),n=0,m}> = \begin{pmatrix} 0 \\ |0>|m> \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E}^{(-)}_{(1);n=0,m} = \omega_2 m - \omega_0,$$

$$|\Psi^{(+)}_{(2),m=0,n}> = \begin{pmatrix} |n>0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{E}^{(+)}_{(2);n,m=0} = \omega_1 n + \omega_0.$$

Проверим полноту системы /15/. Составляя из системы функций /15/ оператор $\sum_{\{i\}} |\Psi_i><\Psi_i|$, где суммирование по i означает суммирование по всем возможным индексам вектора $|\Psi>$, получаем матрицу 2x2. Для левого верхнего элемента этой матрицы получаем выражение

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ m \geq 0}} \frac{(\alpha_1^{+})^2 n(m+1)|n-1><n-1||m+1><m+1|}{1 + (\alpha_1^{(+)})^2 n(m+1)} +$$

$$+ \sum_{\substack{n \geq 1 \\ m \geq 0}} \frac{(\alpha_1^{(-)})^2 n(m+1)|n-1><n-1||m+1><m+1|}{1 + (\alpha_1^{(-)})^2 n(m+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} |n><n||0><0|.$$

которое в силу соотношения $\frac{(a_1^{(+)})^2 n(m+1)}{1+(a_1^{(+)})^2 n(m+1)} + \frac{(a_1^{(-)})^2 n(m+1)}{1+(a_1^{(-)})^2 n(m+1)} = 1$
сводится к выражению

$$\sum_{n\geq 1,\, m\geq 0} |n-1><n-1||m+1| + \sum_{n=0}^{\infty} |n><n||0><0| = \sum_{n\geq 0,\, m\geq 0} |n><n||m><m| = 1.$$

Аналогично, правый нижний элемент матрицы также равен 1, а недиагональные нулю.

Литература

1. Jaynes E.T., Cummings F.W. Proc. of the IEEE, 1963, 51, p.89.
2. Lee B.S. J.Phys.C., 1973, vol.6, p.2873.
3. Рупасов В.И. Письма в ЖЭТФ, 1982, т.36, с.115.
4. Sukumar C.V., Buck B. Phys.Lett., 1980, 81A, p.132.

Рукопись поступила 20 сентября 1985 года.